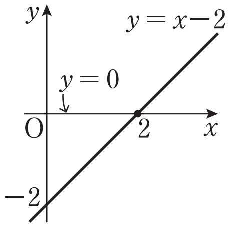
第 10 講　2 次不等式

PART1　2 次不等式と 2 次関数のグラフ

要点 ①　1 次不等式と 1 次関数のグラフ

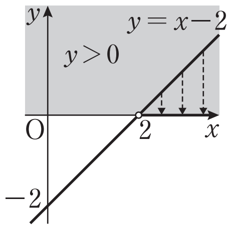
1 次不等式 $x-2>0$ の解は $x>2$ であり，1 次不等式 $x-2<0$ の解は $x<2$ である。これらの解を，1 次関数のグラフで考える。

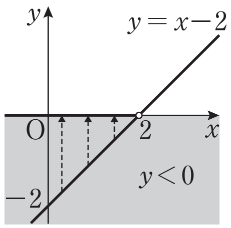


1 次関数 $y=x-2$ のグラフは右図であり，このグラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ となる x の値，つまり方程式 $x-2=0$ の解 $x=2$ である。

1 次関数 $y=x-2$のグラフで x 軸より上側，すなわち　　　となる x の値の範囲は $x>2$ であり，これは 1 次不等式 $x-2>0$ の解である。

また，1 次関数 $y=x-2$ のグラフで x 軸より下側，すなわち　　　となる x の値の範囲は $x<2$ であり，これは 1 次不等式 $x-2<0$ の解である。





一般に，次のことが成り立つ。

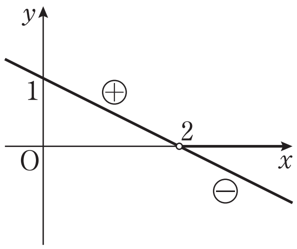
> 不等式 $f(x)>0$ の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフで $y>0$ となる x 座標の範囲であり，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より上側にあるような x の値の範囲である。
> 不等式 $f(x)<0$ の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフで $y<0$ となる x 座標の範囲であり，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より下側にあるような x の値の範囲である。

例　1 次不等式 $-\frac{1}{2}x+1<0$ を，1 次関数のグラフを利用して解く。

$y=-\frac{1}{2}x+1$ のグラフは右図であり，このグラフと

x 軸との交点の x 座標は $x=$

よって，求める不等式の解は



要点② 2次不等式の解（グラフが x 軸と2点で交わるとき）

$x^2-3x+2>0$，$3x^2+4x-1\leqq 0$ のように，不等式のすべての項を左辺に移項したとき，左辺が x の2次式になる不等式を，x についての「　　　　　　　　」という。

1次不等式を1次関数のグラフを用いて解くことができるのと同様，2次不等式についても，2次関数のグラフを用いて解くことができる。

ここでは，2次関数のグラフが x 軸と2点で交わる場合について考える。

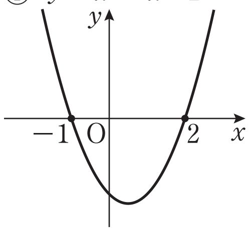
例 2次不等式 $x^2-x-2>0$，$x^2-x-2\leqq 0$ を解く。

2次関数 $y=x^2-x-2$ ……①のグラフと x 軸の交点の x 座標は，

2次方程式 x^2-x-2　　の　　　　$x=-1$，2 である。

①のグラフは　　に凸の放物線であるから，グラフは右図。

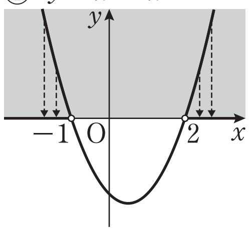
①：$y=x^2-x-2$



2次不等式 $x^2-x-2>0$ の解は，①のグラフで y　　，すなわちグラフが x 軸より　　側にあるような x の範囲である。

よって，不等式 $x^2-x-2>0$ の解は

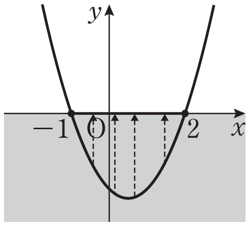
①：$y=x^2-x-2$



2次不等式 $x^2-x-2\leqq 0$ の解は，①のグラフで y　　，すなわちグラフが x 軸より　　側，または　　　　　にあるような x の範囲である。

よって，不等式 $x^2-x-2\leqq 0$ の解は

①：$y=x^2-x-2$



2次関数のグラフが x 軸と異なる2点で交わるときの2次不等式の解は以下となる。

2次不等式の解（グラフが x 軸と異なる2点で交わるとき）

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わるとき，

交点の x 座標を $x=\alpha$（アルファ），β（ベータ） $(\alpha<\beta)$ とすると

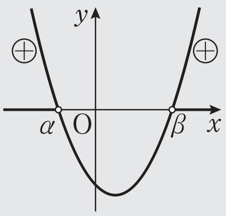
$ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$

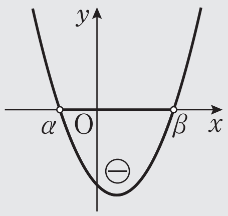
$ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$\alpha\leqq x\leqq\beta$

$ax^2+bx+c>0$



$ax^2+bx+c<0$



1 次の２次不等式を解け

(1)　$(x+2)(x-1)>0$

(2)　$x(x-3)<0$

(3)　$x^2-2x-8\geqq 0$

(4)　$2x^2-5x-3\leqq 0$

(5)　$x^2+5x-2>0$

(6)　$-x^2+4x-1>0$

Point Pickup

２次不等式の解法(1)

２次不等式は，２次関数のグラフをかいて考える。

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) のグラフが x 軸と異なる２点で交わるとき，

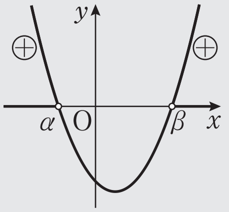
交点の x 座標を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とすると

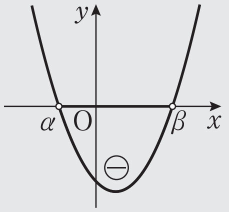
$ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$

$ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$\alpha\leqq x\leqq\beta$





α，β は，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる２解である。よって，２次式 ax^2+bx+c が因数分解できれば，α，β がわかる。因数分解できないときは，$ax^2+bx+c=0$ とおき，解の公式を用いて α，β を求める。

第10講 PART1 確認問題

次の2次不等式を解け。

1 $(x+1)(x-2)>0$

$x<\boxed{アイ}$, $\boxed{ウ}<x$

2 $x(x-4)<0$

$\boxed{エ}<x<\boxed{オ}$

3 $x^2+3x-10 \geqq 0$

$x \leqq \boxed{カキ}$, $\boxed{ク} \leqq x$

4 $3x^2+5x-2 \leqq 0$

$\boxed{ケコ} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$

5 $x^2-3x+1>0$

$x<\dfrac{\boxed{ス}-\sqrt{\boxed{セ}}}{2}$, $\dfrac{\boxed{ソ}+\sqrt{\boxed{タ}}}{2}<x$

6 $-x^2+6x-2>0$

$\boxed{チ}-\sqrt{\boxed{ツ}}<x<\boxed{テ}+\sqrt{\boxed{ト}}$

第10講　２次不等式

PART1　２次不等式と２次関数のグラフ

1　次の２次不等式を解け

(1)　$(x+2)(x-1)>0$

(2)　$x(x-3)<0$

(3)　$x^2-2x-8\geqq 0$

(4)　$2x^2-5x-3\leqq 0$

(5)　$x^2+5x-2>0$

(6)　$-x^2+4x-1>0$

[解答]

(1)　$(x+2)(x-1)=0$ を解くと　$x=-2,\ 1$

よって，不等式の解は　$x<-2,\ 1<x$

(2)　$x(x-3)=0$ を解くと　$x=0,\ 3$

よって，不等式の解は　$0<x<3$

(3)　$x^2-2x-8=0$ を解くと　$(x-4)(x+2)=0$　　$x=4,\ -2$

よって，不等式の解は　$x\leqq -2,\ 4\leqq x$

(別解) $x^2-2x-8\geqq 0$ より $(x-4)(x+2)\geqq 0$　　よって $x\leqq -2,\ 4\leqq x$

(4)　$2x^2-5x-3=0$ を解くと $(2x+1)(x-3)=0$　　$x=-\dfrac{1}{2},\ 3$

よって，不等式の解は　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$

(別解) $2x^2-5x-3\leqq 0$ より $(2x+1)(x-3)\leqq 0$　　よって $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$

(5)　$x^2+5x-2=0$ を解くと $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

よって，不等式の解は $x<\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2},\ \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}<x$

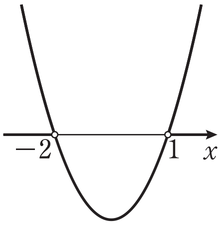
(6)　$-x^2+4x-1>0$ の両辺に -1 をかけて　$x^2-4x+1<0$

$x^2-4x+1=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{3}$

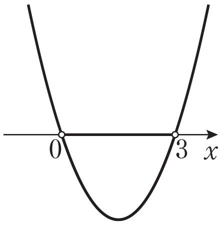
よって，不等式の解は $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

（参考図）

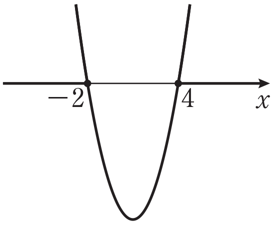
(1)



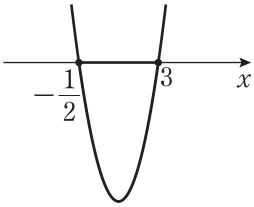
(2)



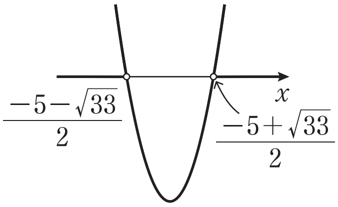
(3)



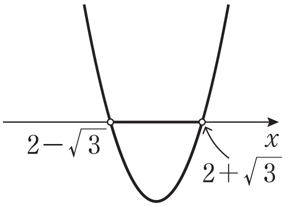
(4)



(5)



(6)



第10講　PART1 確認問題 解答

1 [正解] アイ：-1，ウ：2

[解説]

$$(x+1)(x-2)>0$$

不等式の解は，[A]

$$\boldsymbol{x<-1,\ 2<x}$$

[A]　$\alpha<\beta$ のとき，
$(x-\alpha)(x-\beta)>0$
の解は，$x<\alpha$，$\beta<x$

2 [正解] エ：0，オ：4

[解説]

$$x(x-4)<0$$

不等式の解は，[B]

$$\boldsymbol{0<x<4}$$

[B]　$\alpha<\beta$ のとき，
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$
の解は，$\alpha<x<\beta$

3 [正解] カキ：-5，ク：2

[解説]

$$x^2+3x-10\geqq 0$$

$$(x+5)(x-2)\geqq 0$$

不等式の解は，[C]

$$\boldsymbol{x\leqq -5,\ 2\leqq x}$$

[C]　$\alpha<\beta$ のとき，
$(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$
の解は，$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$

4 [正解] ケコ：-2，サ：1，シ：3

[解説]

$$3x^2+5x-2\leqq 0$$

$$(x+2)(3x-1)\leqq 0 \quad \text{[D]}$$

不等式の解は，

$$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq \frac{1}{3}}$$

[D]

1	╲╱	2 →	6
3	╱╲	-1 →	-1
3		-2	5

5 **[正解]** ス：3，セ：5，ソ：3，タ：5

[解説]

$x^2-3x+1=0$ を解くと，

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ [E]

[E]　左辺が因数分解できないときは，解の公式で解く。

よって，不等式 $x^2-3x+1>0$ の解は，

$$\boldsymbol{x<\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x}$$

6 **[正解]** チ：3，ツ：7，テ：3，ト：7

[解説]

$$-x^2+6x-2>0$$

両辺に -1 をかけて，[F]

[F]　x^2 の係数を正にする。

$$x^2-6x+2<0$$

$x^2-6x+2=0$ を解くと，$x=3\pm\sqrt{7}$

よって，不等式の解は，

$$\boldsymbol{3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}}$$